TD 3 : Sur l'approximation numérique de l'équation de la chaleur

Exercise 1 **Continuité.**

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue. De même, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

3. Considérons la fonction u définie sur $[0,\infty[\times[0,1]$ par

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} sin(n\pi x),$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\sum_n^\infty n^2|a_n| < \infty$. Montrer que u est continue sur $[0,\infty[\times[0,1]$.

4. Soit u une fonction de classe C^3 définie sur $[0,1]$ telle que

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \qquad u''(0) = 0, \quad u''(1) = 0.$$

Nous définissons $\hat{u}$ sur $\mathbb{R}$ à partir de u par

(i) un prolongement par imparité sur [-1,1],

(ii) puis, un prolongement par périodicité sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\hat{u}$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

Exercise 2 Schéma non convergent.

Considérons l'équation de la chaleur avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0, & x \in]-4,4[,\ t \in]0,1[\\ u(t,-4) = 0,\ u(t,4) = 0, & t \in]0,1[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in]-4,4[. \end{cases}$$

où $u_0 \in C([-4,4])$ avec $u_0(-4) = 0$ et $u_0(4) = 0$. Notons $u \in C^\infty(]0,1] \times [-4,4])$ l'unique solution. On suppose de plus que $u_0 \geqslant 0$ sur $[-4,4]$, que u_0 est nulle sur $[-3,4]$ et qu'il existe $a \in]-4,-3[$ tel que $u_0(a) > 0$. On rappelle (ceci est admis) que, puisque $u_0 \geqslant 0$, on a

$$u(t,x) > 0, \quad \forall (t,x) \in]0,1] \times]-4,4[.$$

Nous allons considérer le schéma d'Euler explicite. On note $\delta t = 1/(M+1)$, $M \in \mathbb{N}$, le pas de temps et $\delta x = 8/(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$, N impair, le pas d'espace. La solution approchée aux points $(n\delta t, j\delta x)$ sera notée u_j^n pour $j \in \{-(N+1)/2, ..., (N+1)/2\}$ et $n \in \{0, ..., M+1\}$.

1. Rappeler la définition du schéma d'Euler explicite.

2. Supposons maintenant que $\delta t = \delta x$. Montrer que $u_j^n = 0$ pour $i \geqslant 0$ et $n \in \{0, ..., M+1\}$. En déduire que $\max \left\{ \left| u_j^{M+1} - u(1, j\delta x) \right|,\ j \in \{-(N+1)/2, ..., (N+1)/2\} \right\}$ ne tend pas vers 0 quand δx tend vers 0 (c'est-à-dire quand N tend vers $+\infty$).

Exercise 3 θ-schéma.

Considérons l'équation de la chaleur avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0, & x \in]0,1[,\ t \in]0,T[\\ u(t,0) = 0,\ u(t,1) = 0, & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in]0,1[. \end{cases}$$

où $T > 0$ et u_0 est la donnée initiale telle que $u_0(0) = 0$ et $u_0(1) = 0$. Soit $(N,M) \in \mathbb{N}^2$. On fixe $\delta t = T/(M+1)$ et $\delta x = 1/(N+1)$. Soit $\theta \in [0,1]$, on considère le θ-schéma défini de la manière suivante. Pour $n = 0$, u_j^0 est définie grâce à la donnée initiale u_0 :

$$u_j^0 = u_0(j\delta x),\ \forall j = 0, ..N+1.$$

Ensuite pour $n = 0, .., M$, $(u_j^{n+1})_j$ est définie à partir de $(u_j^n)_j$ par

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{\delta t}{\delta x^2} \theta \left(2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} \right) - \dfrac{\delta t}{\delta x^2} (1-\theta) \left(2u_j^n - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n \right), \ \forall j = 1, ..N, \\ u_0^{n+1} = 0,\ \text{et } u_{N+1}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

2. Etudier l'ordre de consistance du schéma.

3. Stabilité (L^2) au sens de Von Neumann

(a) Montrer que le schéma est stable si $\theta \geqslant 1/2$.

(b) Montrer que, si $\theta < 1/2$, le schéma est stable sous la condition $\delta t < \delta x^2/(2-4\theta)$.

4. Stabilité L^∞. Montrer que le schéma est L^∞-stable sous la condition

$$\frac{\delta t}{\delta x^2} 2(1-\theta) < 1.$$

5. Montrer la convergence du schéma en norme L^∞ sous la condition $\dfrac{\delta t}{\delta x^2} 2(1-\theta) < 1$. Quel est l'ordre du schéma ? Que pensez-vous du cas $\theta = 0.5$?

Exercise 4 Saute-Mouton.

Considérons l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0, & x \in]0,1[, \ t \in]0,T[\\ u(t,0) = 0, \ u(t,1) = 0, & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in]0,1[. \end{cases}$$

où $T > 0$ et u_0 est la donnée initiale telle que $u_0(0) = 0$ et $u_0(1) = 0$. On fixe N et M deux entiers positifs et on pose $\delta t = T/(M+1)$ et $\delta x = 1/(N+1)$. Considèrons le schéma défini de la manière suivante :

$$u_j^0 = u_0(j\delta x), \ \forall j = 0, ..N+1.$$

et pour tout $n = 0, .., M$

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\delta t} + \dfrac{2u_j^n - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\delta x^2} = 0, \ \forall j = 1, ..N, \\ u_0^{n+1} = 0, \ \text{et } u_{N+1}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

1. Le schéma est-il implicite ou explicite ?

2. Démontrer que le schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

3. Etudier la stabilité au sens de Von Neumann.

4. On remplace maintenant le terme u_j^n dans le schéma par la moyenne $(u_j^{n+1} + u_j^{n-1})/2$. Montrer que le schéma obtenu est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

5. Etudier sa consistance.

Exercise 5 Schéma implicite ou explicite ?

Considérons l'équation de la chaleur avec des conditions de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0, & x \in]0,1[, \ t \in]0,T[\\ u(t,0) = 0, \ u(t,1) = 0, & t \in]0,T[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in]0,1[. \end{cases}$$

où $T > 0$ et u_0 est la donnée initiale telle que $u_0(0) = 0$ et $u_0(1) = 0$. On fixe N et M deux entiers positifs et on pose $\delta t = T/(M+1)$ et $\delta x = 1/(N+1)$. On s'intéresse au schéma suivant :

$$u_j^0 = u_0(j\delta x), \ \forall j = 0, ..N+1.$$

et pour tout $n = 0, .., M$

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + \dfrac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\delta x^2} = 0, \ \forall j = 1, ..N, \\ u_0^{n+1} = 0, \ \text{et} \ u_{N+1}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

2. Effectuer l'analyse de stabilité au sens de Von Neumann.

3. Ce schéma est-il plus intéressant que le schéma aux différences finies explicites ou que le schéma de Crank-Nicolson ?